Н. Н. Красовский

РАЗМЫШЛЕНИЯ О МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБРАЗОВАНИИ

Меня попросили высказать какие-то мои суждения относительно преподавания, преподавания вообще, преподавания в школе, о современном школьном образовании в области математики и информатики и в связи с этим еще какие-нибудь соображения.

Предметом моих разговоров будет в основном то, что позволю себе называть экспериментальной математикой. Под этим понимаю органическое соединение математики как таковой с ее аксиоматикой, абстрактными теоремами, алгоритмами – с информатикой. Может быть, не очень аккуратно и точно, но информатикой я позволю себе называть автоматизацию вычислений, геометрических построений, логических рассуждений, формирование коммуникационных связей и особенно упаковку и распаковку информации – научной, технической, экономической...

Сначала несколько общих суждений.

Отважусь сказать, что в наше время математическому образованию – и на высшем уровне, и особенно в школе – грозят большие беды. Время на обучение математике безжалостно сокращается. Программа и методика трансформируются, мягко говоря, своеобразно.

Очень беспокоит, как бы не разрушилось преподавание в школе позитивных базовых предметов – и особенно математики и информатики – в угоду так называемой личностно-развивательной педагогике. Всю жизнь я отстаивал приоритет конкретного предметного обучения, которое должно осуществляться под лозунгом «Корень учения горек, плоды его сладки». Учеба – тяжелый труд. И жизнь

Николай Николаевич Красовский – российский ученый-математик с мировым именем. Кроме научной деятельности он широко известен своей огромной подвижнической работой в области школьного математического образования. Идея записать «беседы» связана с завершением этапа проводимых в ИММ работ по разработке методов и программных средств для Интернет-видеотехнологий, в частности, для создания видеотек, записи из которых можно посмотреть из любой точки мира через Интернет. На сегодняшний день записано восемь «бесед» Николая Николаевича, которые посвящены частично рассмотрению поучительных задач из области математики и информатики, частично – воспоминаниям о развитии математики на Урале. Все сделанные записи можно посмотреть, войдя через Интернет на медиасайт УрО РАН webTV.uran.ru убедила меня, что именно трудовое мастерство, будь то наука, инженерия, искусство, любой полезный физический или умственный труд, формирует достойную личность, а не наоборот. Тем более опасной представляется тенденция превращать учебу в заманчивое развлечение. Напомню хрестоматийное суждение великого Блеза Паскаля: «Добродетель обучения – быть ключом к знанию и полезному труду. А быть заманчивым – добродетель рыболовного крючка».

Уверен, что учитель – преподаватель математики и информатики, да и любой другой полезной дисциплины – должен быть прежде всего предметником. Если учитель математики приходит в класс и ребята видят, что он не силен в решении задач, то какие бы красивые «личностно-развивающие философские» идеи он перед ними ни развивал, вряд ли такой учитель сумеет подвигнуть на серьезный учебный труд. И вряд ли у него появится даже хотя бы и авторитет в «личностно-развивательном плане». Свердловску повезло с замечательными преподавателями, в том числе преподавателями математики. Назову для примера двух замечательных предметников и высокопорядочных людей, мужественных граждан: Георгия Алексеевича Иванова и Николая Ивановича Слободчикова, которых уже нет с нами. Повторю, это прежде всего были очень сильные предметники, которые умели увлечь своим предметом школьников и уже на этой основе формировать нравственные качества учеников. Тем более что, как я уже сказал, будучи великими – не побоюсь этого слова – мастерами своего дела, эти преподаватели были еще и высоконравственными личностями. Увы, их достоинства не всегда хорошо отражались на их жизненных обстоятельствах. Зато в память о них осталось много замечательных тружеников-граждан, в том числе – крупных ученых.

Я не одинок в приоритетных суждениях о ценности прежде всего предметного обучения, особенно в области математики. Просто присоединяюсь к большой группе компетентных лиц, которых волнуют проблемы преподавания. Могу сослаться на жесткие публикации математиков: учителя Совайленко, профессора Розова, академиков Арнольда, Аносова, Никольского и многих других. Они тоже очень обеспокоены вопросом о том, как дальше преподавать математику, развивая славные традиции русской педагогической школы. И притом, увы, нас всех волнует, как бы дело не обернулось так, что речь уже будет идти не о развитии славных традиций преподавания, а хотя бы только о спасении его основных ценностей.

Ну, «спасать» – может быть, излишне грубое слово. Но как не дать в обиду в школе основы науки математики и ее преподавания – вот о чем болит душа многих из тех, кто отдал этой науке и преподаванию многие годы, а также тех зрелых и молодых людей, кому предстоит определять школьное и вузовское преподавание в XXI веке. Не хотелось бы никого обидеть из властей предержащих, в том числе и из административных руководителей в области образования, но, право же, в тенденциях грядущих реформ видятся ростки тех самых педологических идей и действий, которые цвели как могучее древо в педагогике 20-х годов прошлого века, подавлявшее живую математику, да и не только математику. Не забудем, что все здоровое в обществе радовалось, когда рухнуло это все подавляющее древо. Может быть, я слишком подозрителен, но при знакомстве с теми или иными реформами преподавания, коих на своем веку пережил немало – и плодотворных, и скандальных, – всегда вспоминались (и вспоминаются сейчас!) суждения знаменитого английского писателя, которые звучат примерно так: «Представляется, что реформы преподавания обычно сводятся к следующему. В результате осуществления этих реформ чрезвычайно образованный учитель может обучить особенно одаренного ученика по учебнику ценой в одну гинею в лучшем случае примерно тому же, чему сейчас обучает рядовой учитель обыкновенного школьника по учебнику ценой в один шиллинг».

Кстати, в связи с этой цитатой не могу не остановиться на вопросе о расслоении в школьном, да и не только в школьном, образовании, которое отражает невероятное расслоение современного общества вообще. Выделилось так называемое элитное образование. В принципе, плохого в этом нет. Вероятно, это даже хорошо. Нельзя не согласиться с тем, что человек, страстно желающий посвятить себя тому или иному делу и имеющий к тому природные предпосылки, должен получить возможность обучения, которое предоставит ему возможность стать большим мастером этого дела. Но при всем при том и всякий так называемый рядовой школьник все равно должен получать добротное образование, которое обеспечит ему возможность успешно жить и работать в пределах избранной им стези, какой бы внешне (!) «скромной» она ни казалась. Но мне видится, что в наших условиях расслоение приобретает подчас ненормальную форму. Да простят меня те, кого это касается, но полагаю, что народное образование в России существенно оздоровилось бы, если бы было поменьше тех высокопоставленных чиновников, которые гонятся за модой учить своих детей приватно, дома, с приходящими учителями, или же, что кажется еще более модным, учить своих детей в престижных школах за границей. Во избежание недоразумения скажу, что речь здесь идет именно о государственных чиновниках, которые, хотят они этого или не хотят, являются примером: noblesse oblige. Другое дело просто богатый человек – бизнесмен, звездный спортсмен, писатель, артист, фермер, вообще большой мастер в любой профессии... Должен согласиться, что он вполне имеет моральное право обеспечить своим детям такое образование, какое считает нужным. Это естественная реальность рыночной капиталистической экономики вне зависимости от того, нравится это мне или нет.

Считал нужным высказать это, может быть, несколько эпатажное суждение прежде всего по той причине, что ведь подавляющая-то масса материально неизбалованных школьников учится в так называемых рядовых школах у учителей, которые вкладывают всю душу в свое благородное дело, будучи введенными в состояние крайнего материального ущерба. Отдаю себе отчет в том, что, может быть, в моих устах, академика, жизнью никак не обиженного, «имеющего ванную и теплый клозет», это может выглядеть как некий нетрудный для меня дешевый популизм. Спорить не буду. И все-таки, право слово, очень досадно, что в наше время всемирного торжества информационных технологий многие, очень многие учителя лишены возможности использовать это достижение цивилизации и вынуждены в лучшем случае пользоваться его крохами. Ни для кого не секрет, что во многих школах, особенно на так называемой периферии и особенно в сельских школах, в лучшем случае есть возможность работать с одним-двумя компьютерами. А появление где-нибудь в таком нетривиальном месте компьютерного класса превозносится уже как величайшее административное достижение. Впрочем, очень утешает то, что по крайней мере в нашем городе и в нашей области те, от кого это зависит, понимают важность *равномерной* тотальной компьютеризации образования. И хочу верить, что эти планы действительно удастся осуществить в обозримое время.

После этих общих слов о делах, на которые, откровенно говоря, повлиять-то более или менее эффективно не могу, перейду к вещам, уже близким к моей специальности. И теперь хотел бы как-то охарактеризовать тот конкретный предмет, о котором буду говорить дальше. Конечно, судить о том, насколько этот предмет полезен, насколько интересен, можно лишь на основе решения конкретных задач, на разборе конкретных теорем. Имея в виду прежде всего общедоступное, уверен, однако, что не следует «бояться» и трудных теорем и задач. Но здесь я смогу обсудить только две задачи, хотя и высокого ранга по их содержанию, однако же легко понятных для любого школьника из нормальной средней школы.

Но сначала еще отклонюсь на одну небольшую ремарку. Конечно, квалификация учителя, который может выучить элитного ученика, победителя олимпиад и т. д., естественно, должна отличаться от квалификации учителя, который обучает в массовой школе. Подчеркну, речь идет отнюдь не об уровне квалификации, а о том, что это все-таки разные учительские специализации и по содержанию, и по форме. И при этом должен признаться, что не знаю, каким же должен быть в XXI веке и тот и другой учитель. Надеюсь, что будущее научит общество высоко ценить учителей и того и другого рода.

Итак, отвлекаясь теперь уже от «социальных» вопросов, обращусь непосредственно к тому, что сегодня представляется мне одним из главных веяний математической науки, – к экспериментальной математике. Что я имею в виду? Прежде всего веру в компьютерный эксперимент. Подчеркиваю – *веру*. Причем под компьютерным экспериментом понимается не только осуществление какого-то вычислительного алгоритма. Это может быть и реализация алгоритма для каких-либо геометрических построений или алгоритма автоматического поиска логической цепочки рассуждений от исходных предпосылок к искомому выводу или даже алгоритма, имитирующего интуитивный подсознательный поиск решения проблемы и т. д. То есть термин «компьютерный эксперимент» предпочту понимать в очень широком смысле, хотя его привычное наименование «вычислительный эксперимент».

А что значит «вера»? Просто идеалистически уповать на веру – этого мало. Имеется в виду вера как категория, определяющая действие. А именно, пусть имеется какая-то реальная содержательная задача. Опираясь на раскованную интуицию и притом на аккуратную логику, абстрактные знания, особенно в области математики, и привлекая «поисковый» вычислительный эксперимент, стараемся осмыслить задачу и построить для нее математическую модель, работа с которой будет возможна на базе математики как таковой и одновременно на базе доступных информационных технологий. А затем обязательно – проверка адекватности абстрактного и симулированного на компьютере решения по отношению к исходной реальной проблеме. И вера в успех!

Естественно, и учитель, и школьник, я неоднократно с этим сталкивался, говорят: почему вы так настаиваете именно сегодня, что «экспериментальная математика», а разве вычислительного эксперимента не было в течение всей истории цивилизации? Да, конечно, был. Но в настоящее время ситуация резко изменилась благодаря такому мощному средству, как компьютер, и быстроразвивающемуся математическому обеспечению. Математика приобретает новые формы: можно проводить обширный, глубокий, наглядный вычислительный эксперимент. Приведу такой пример.

Отвлекусь в историю давнюю. В глубокой древности математиков – и обывателей, может быть, тоже, но в основном математиков – интересовало построение правильного многоугольника. Центральным был вопрос: какой многоугольник и как можно построить циркулем и линейкой? Подоплека проблемы понятна: циркуль и линейка были инструментом того времени. Уже в начале нашей эры знали, например знал еще Герон Александрийский, что циркулем и линейкой можно построить треугольник, четырехугольник, пятиугольник. Ну а дальше?.. Знали, что семиугольник циркулем и линейкой точно построить нельзя. И это почти все! Решительный сдвиг был сделан великим Гауссом. В девятнадцать лет он установил следующую замечательную теорему. Если n есть простое число, то построить правильный n-угольник циркулем и линейкой можно тогда и только тогда, когда это простое число к тому же можно записать в виде , где k – натуральное число. Гаусс очень гордился, что обнаружил это. В частности, нужным условиям удовлетворяет простое число 17:17 = $2^{2^2}+1$. Хрестоматийно известно, что Гаусс даже пожелал, чтобы на его памятнике был выбит семнадцатиугольник. Завещание по форме не столь уж редкое среди великих людей. Например, согласно легенде, Архимед, установивший соотношение между объемами цилиндра и шара, пожелал, чтобы его саркофаг был выполнен в форме шара, вписанного в цилиндр.

Оставался вопрос: все ли числа вида при любом натуральном k являются простыми? В давние времена полагали, что эта гипотеза верна. Можно думать, что еще Ферма, великий Ферма, допускал, что всякое число вида есть число обязательно простое. Было проверено в давние времена, что при k = 0, 1, 2, 3, 4 названные числа являются простыми. Ну а дальше, как говорится, можно ведь по индукции «доверия» полагать, что и при $k > 4$ тоже будут получаться только простые числа. Однако же великий Эйлер доказал, вычислил искуснейшим способом, что уже при $k = 5$ число простым не является. Это очень и очень длинное число в десятичной записи. Для того чтобы вычислением «от руки» установить, что число это не простое, потребовался гений Эйлер. Оказалось, что это не простое число имеет множитель 641. А в наше время рядовой школьник, которого учит информатике умелый учитель и поэтому он понимает в информатике и умеет удовлетворительно программировать, может составить ординарную программу для проверки на простоту последовательности чисел данного вида и быстренько обнаружит с помощью этой ординарной программы, что действительно число имеет множитель 641 и, таким образом, простым не является. Утверждаю это на основании такого опыта. Группа школьников готовилась в нашем институте (ИММ УрО РАН) под руководством Владимира Валентиновича Прохорова к очередной олимпиаде по информатике. Я зашел в аудиторию и неожиданно предложил составить программу, которая бы проверила число на простоту. Не прошло и пяти минут, как мне продемонстрировали работу программы, которая установила, что обсуждаемое число имеет множитель 641. Но, правда, это все-таки были отлично тренированные в информатике школьники. Пусть так, но утверждаю еще раз, что рядовой школьник может это сделать весьма успешно, хотя ему для этого потребуется побольше времени. Вы скажете, что это не очень актуальный пример. Может быть. Как писал еще знаменитый геометр Феликс Клейн в начале прошлого века, «циркуль и линейка – это сравнительно примитивный инструмент и придавать ему уж слишком большое значение или чуть ли не делать идолом в геометрии уже, пожалуй, и не стоит». Тем более следует иметь в виду, что в наше время есть такой мощный инструмент, как компьютер. Можно еще добавить, что если и не точно, то зато все-таки с очень большой степенью приближения семиугольник, например, можно построить циркулем и линейкой.

И это знал уже Герон Александрийский, упомянутый выше. А затем многократно перепроверяли так называемые восточные математики.

Признаюсь, что наряду с логически «безупречной», аккуратной математикой и даже метаматематикой очень люблю именно не очень строгую, приближенную, но зато полезную математику.

Однако же многие достойнейшие математики и в наше время отличаются характерным снобизмом: говорят, приближенная математика и ее методы – это интересно только для ремесленников. На то они и математики, чтобы говорить так. И это очень хорошо, что есть такие рафинированные математики. Ведь именно среди них и находятся те, кто возвышают математику, даже вплоть до метаматематики, и тем самым прорубают дорогу для прагматически полезной, пусть далеко не всегда строгой математики. Будем почитать и рафинированных математиков, и тех физиков, инженеров, биологов, экономистов, которые любят «ремесленную» математику. Ибо земная, «прикладная» математика – ремесло, так же как и небесная; «чистая» математика – ремесло, есть то «мое святое ремесло», как писала в свое время о поэзии одна наша замечательная поэтесса.

Обращусь к другому, пожалуй, несколько более современному, серьезному примеру, где можно проследить органическое соединение математики, причем самых глубинных, фундаментальных математических обстоятельств с вычислительным экспериментом тоже высокого класса. Этот пример доставляет решение в прошлом – XX веке – знаменитой задачи о четырех красках. Может быть, на первый взгляд эта задача выглядит даже карикатурной. Пусть это действительно математическая карикатура. Однако утверждаю, что всякая математическая модель, даже самая совершенная и даже для самой серьезной реальной проблемы есть все равно карикатура. Ибо ведь именно карикатура и выделяет самое главное, самое существенное в проблеме. В такой карикатурности и сила математики. Да и не только математики.

Позволю себе даже сказать, что и не только в науке (!), карикатура часто дает более глубокое проникновение в суть дела, чем тот или иной тщательно выписанный респектабельный портрет. Хрестоматийным примером, хотя и не из области математики, а из области искусства, является портрет папы Иннокентия X, написанный в свое время великим Веласкесом. Портрет, который восхитил как самого папу, так и так называемую общественность того времени и который восхитил и восхищает и знатоков, и рядовых граждан и в наше время. Общепризнанно ведь, что названный удивительный феномен искусства мощно соединил в себе реалистичное изображение действительности и притом использовал на полную силу свойство карикатуры, отражающей всю глубину жизненной сути.

Итак, упомянутая задача, как известно, состоит в следующем. Имеем обычную плоскость и можем нарисовать на ней любую «сказочную» карту, с различными странами в форме каких-то фигур. Спрашивается, можно ли придумать и нарисовать такую карту, на которой каждые две страны, имеющие общую границу ненулевой длины, были бы разного цвета и притом для такой раскраски не хватило бы четырех разных красок? Имела место гипотеза: в любом случае, как ни фантазируй, всегда хватит четырех красок. При этом давно удалось доказать, что уж пяти-то красок хватит наверняка. Эта сказочная задача на самом деле является трудной математической проблемой, затрагивающей глубинные топологические свойства плоскости. И именно число 4 отражает в данной форме топологию плоскости. А, например, если рисовать карту на торе, то есть на поверхности, имеющей форму бублика, то там уже потребуется, и это тоже было известно, совсем другое количество красок.

Существенно, что эту проблему удалось решить в XX веке, объединяя знание абстрактных топологических свойств плоскости с компьютерным экспериментом. И важно, что компьютерный эксперимент отнюдь не состоял здесь в том, чтобы заставлять компьютер рисовать все возможные конфигурации. Это просто немыслимо. Но удалось установить, и это есть замечательный математический факт, что имеется некоторое конечное, не очень уж по современным меркам большое число конфигураций, которые только и достаточно просчитать.

Таким образом, объединяя эти достигнутые к нашему времени фундаментальные математические знания и компьютерный эксперимент, который тоже уже сейчас оказался посильным для современных вычислительных машин, перебрать упомянутые конфигурации и доказать, что, действительно, в случае любой мыслимой карты четырех красок оказывается вполне достаточно.

Можно много привести других примеров, когда объединение глубоких теоретических познаний и эффективного компьютерного эксперимента позволило решить не только сугубо научные проблемы, но и такие, которые, как было принято говорить раньше, важны и для промфинплана, и для нас, просто обывателей. В конце концов, такие сверхсовременные актуальные деяния, как ядерная физика и космонавтика, в значительной степени базируются именно на том, что я позволяю себе называть экспериментальной математикой.

Не хотелось бы, однако, чтобы мои суждения хоть как-то означали желание принизить роль фундаментальных знаний, порождение естественного человеческого интеллекта. Напротив, уверен, что именно развитие естественных возможностей познания и их непременная защита от компьютерного прагматизма и опасностей виртуального мировосприятия есть насущная задача науки и образования в наше время.

В связи с этим вспомним, что наш замечательный президент Академии наук СССР Мстислав Всеволодович Келдыш любил говорить: «Человек должен знать намного больше того, что ему может потребоваться для практики».

Впрочем, даже еще и король Лир говорил: «Allow not nature more, than nature needs, men's life is cheap as beast's». Добавлю к этому то, что любят говорить многие учителя математики, и я в том числе, своим ученикам: «Кто знает больше, тот при решении конкретной проблемы может обойтись меньшим. Да и решение получится получше».

Вот так бегло и, конечно, очень неаккуратно я попробовал охарактеризовать, то, что хочу отстаивать. Отстаивать ту позицию, что в наше время изучать математику абстрактную – это очень важно. И надо знать ее, и надо стараться развить и раскованную интуицию, и строгое логическое мышление каждому школьнику. И надо уметь решать задачи, когда надо – строго обоснованно, а когда – интуитивно достоверно. И должны быть и такие специалисты, которые могут решать тончайшие, чисто математические задачи сугубо умозрительно, не используя компьютерную технику. Без такой элиты общество будет ущербным. Нужны и прагматичные вычислители, которые умели бы или по уже готовому алгоритму, или по уже ими самими сконструированным «рабоче-крестьянским» алгоритмам строить для реальных задач вычислительные процедуры, развивать соответствующие коммуникации и т. д. И, разумеется, в «міру» должны существовать и такие ученые и практики – «синтезаторы» – кто в меру хорошо умеет и то и другое.

В согласии с этим мне представляется, что в школе очень важно, наряду с самодостаточным курсом математики, самодостаточным курсом информатики, иметь также такую ветвь, где органически сливаются и математика как таковая, и информатика в форме ее могучих технологий. Я делаю акцент на этом потому, что если посмотреть на то, что сейчас происходит в школах, то увидим, что там обычно есть преподаватели математики и курс математики и отдельно преподаватели информатики и курс информатики. И очень мало математиков, кто одновременно преподает и информатику, или информатиков, кто одновременно преподает математику. И получается опасный разрыв. Повторю (уже который раз), что слияние в школе математики и информатики – это насущная задача нашего времени. И, уверен, это особенно способствовало бы также и такой важнейшей роли математики и информатики, когда они становятся в своем единении сильнейшим средством обучения всем основным базовым школьным дисциплинам.

Математика и информатика не идол, а инструмент-работяга в науке, практике и обучении.

Добавлю еще, что мне представляется, что вообще всякое занятие по математике сейчас желательно проводить в компьютерном классе. Так же как и приемные экзамены в вуз желательно проводить в компьютерных классах – и для тех, кто поступает в технический вуз, и для тех, кто поступает в медицинское, экономическое, гуманитарное высшее учебное заведение. Вплоть до таких вершинных вузов, как МГУ и, позволю себе добавить, как УГТУ-УПИ и УрГУ.

Скажу еще, что если возобладает тестовая проверка знаний по математике на выходе из средней школы или при поступлении в вуз, то такие теоретические математические тесты должны обязательно включать и компьютерный эксперимент.

На днях школьникам Свердловской области было предложено принять участие в репетиции Единого тестового экзамена. Мне довелось познакомиться с предложенными тестовыми задачами. В этих тестах никак нельзя усмотреть, что мы живем в эпоху, когда информационные технологии стали универсальным, всесильным математическим средством. Не думаю, что в наше время можно аттестовать ученика, как образованного в области математики человека, не проверив, что он умеет хотя бы в какой-то мере работать с компьютером. Ведь еще почти сто лет назад Феликс Клейн говорил, что учитель математики не должен упускать возможности использовать при обучении все доступные ему и ученику вычислительные средства.